И. Е. Максименко (Санкт-Петербург)

БИОРТОГОНАЛЬНОСТЬ МАСШТАБИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть M — целочисленная матрица $d \times d$, такая, что все её собственные числа по модулю больше 1, $m := |detM|$ и пусть $c : Z^d \to C$, $\varphi : R^d \to C$, тогда уравнение $\varphi(x) = \sum\limits_{q \in Z^d} mc(q)\varphi(Mx - q)$, $x \in R^d$ назовем масштабирующим, и будем говорить, что функция φ является (M, c)-масштабирующей. Определим оператор W_c, действующий из $l^2(R^d)$ в $l^2(R^d)$, по формуле $(W_c b)(p) := \sum\limits_{q \in Z^d} mc(Mp - q)b(q)$, $b \in l^2(R^d)$. Если $f : R^d \to C$, то через f_1 будем обозначать сужение f на целочисленную решетку. Пусть здесь и далее φ, $\tilde{\varphi} : R^d \to C$, с компактным носителем; c, $\tilde{c} : Z^d \to C$. Положим $\varphi_*(x) = \int\limits_{R^d} \varphi(t)\overline{\tilde{\varphi}(t - x)}dt$, $x \in R^d$; $c_*(p) = \sum\limits_{q \in Z^d} c(q)\overline{\tilde{c}(q - p)}$, $p \in Z^d$.

Теорема 1. *Пусть $c, \tilde{c}$ — последовательности такие, что $\hat{c}(0) = \hat{\tilde{c}}(0) = 1$. Функции $\varphi, \tilde{\varphi}$ — соответственно (M, c), $(M, \tilde{c})$-масштабирующие с компактным носителем. Тогда следующие условия равносильны:* 1. *Целые сдвиги функций φ, $\tilde{\varphi}$ биортогональны.* 2. *$\delta(p)$ – единственный собственный вектор оператора W_{c_*}, соответствующий собственному числу* 1 *(здесь $\delta(0) = 1$, $\delta(p) = 0$ если $p \neq 0$).* 3. а) *$mc_*(Mp) = \delta(p)$ для любого $p \in Z^d$* б) *$\hat{\varphi}_{*1}(u) \neq 0$ для любого $u \in R^d$.* 4. *$\hat{\varphi}_{*1}(u) = 1$ для любого $u \in R^d$.*

Маскам $c, \tilde{c}$ соответственно можно сопоставить 2π-периодические по каждой переменной функции, которые тоже часто называют масками $m_0(x) := \sum\limits_{k \in Z^d} c(k)e^{-i(k,x)}$, $\tilde{m_0}(x) := \sum\limits_{k \in Z^d} \tilde{c}(k)e^{-i(k,x)}$, $x \in R^d$. Положим $H = Z^d \cap M^*[0,1)^d$ (здесь M^* — сопряженная к M матрица).

Лемма. *Если целые сдвиги φ, $\tilde{\varphi}$ биортогональны и финит-*

ны, то

$$\sum_{s\in H} m_0(u+2\pi(M^{-1})^*s)\overline{\tilde{m}_0(u+2\pi(M^{-1})^*s)} = 1,$$

$$\text{для п.в. } u \in R^d. \qquad (1)$$

Теорема 2. *Пусть* $\varphi, \tilde{\varphi}$ *— соответственно* (M, c), $(M, \tilde{c})$*-масштабирующие функции с компактным носителем, их маски* m_0, $\tilde{m}_0$ *удовлетворяют условию* (1), $m_0(0) = \tilde{m}_0(0) = 1$. *Для того, чтобы целые сдвиги* φ, $\tilde{\varphi}$ *были биортогональны необходимо и достаточно, чтобы существовал компакт* K, *конгруэнтный* $[-\pi,\pi]^d$ *по модулю* 2π, *содержащий окрестность* 0, *такой что*

$$\inf_{k\in N}\inf_{u\in K}|m_0((M^{-k})^*u)| > 0, \quad \inf_{k\in N}\inf_{u\in K}|\tilde{m}_0((M^{-k})^*u)| > 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets*// CBMS-NSR Series in Appl. Math., SIAM. - 1992.

2. Lawton W, Lee S. L, Chen Z. *Stability and orthonormality of multivariate refinable functions*// SIAM J. of Math. Anal. - 1997. - V. 28. - No 4. - P. 999–1014.

М. А. Малахальцев (Казань)

КОМПЛЕКС СПЕНСЕРА СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

В работе [1] для любой интегрируемой G-структуры на гладком многообразии M построена резольвента пучка инфинитезимальных автоморфизмов этой структуры — комплекс пучков векторнозначных форм, являющийся P-комплексом Спенсера дифференциального оператора, индуцированного производной Ли. Для комплексной структуры соответствующий комплекс есть комплекс Дольбо, для структуры слоения — комплекс Вайсмана.